

§4 Spingruppen

Im gesamten Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

4.1 Symmetrische Bilinearformen

Eine symmetrische Bilinearform ist eine bilineare Abbildung $q : V \times V \rightarrow K$ auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum V mit der Eigenschaft $q(v, v') = q(v', v)$ für alle $v, v' \in V$. Die zugehörige quadratische Form $\tilde{q} : V \rightarrow K$ ist die Abbildung $\tilde{q}(v) = q(v, v)$. Daraus kann man die Bilinearform durch Polarisierung

$$q(v, v') = \frac{1}{2}(\tilde{q}(v + v') - \tilde{q}(v) - \tilde{q}(v')) \quad (4.1)$$

zurückgewinnen. Ein Isomorphismus von symmetrischen Bilinearformen (V, q) und (V', q') ist ein Vektorraumisomorphismus $\Phi : V \rightarrow V'$ mit $q'(\Phi(v_1), \Phi(v_2)) = q(v_1, v_2)$ für alle v_1, v_2 . Solche Isomorphismen heißen orthogonale Abbildungen oder Isometrien.

Zwei Vektoren v und v' stehen bezüglich q senkrecht aufeinander, in Zeichen: $v \perp v'$, wenn $q(v, v') = 0$. Analog schreiben wir $X \perp X'$ für beliebige Teilmengen $X, X' \subset V$, wenn $x \perp x'$ für alle $x \in X$ und $x' \in X'$. Die Menge der zu einer Menge $S \subset V$ senkrechten Vektoren $S^\perp \subset V$ ist ein Unterraum. Ein Vektor $v \in V$ bzw. ein Unterraum $W \subset V$ heißen isotrop, wenn $v \perp v$ bzw. $W \perp W$. Das Radikal von q ist der Unterraum

$$\text{rad}(q) := V^\perp$$

Die Form q heißt nicht ausgeartet, wenn $\text{rad}(q) = 0$. Falls $\text{rad}(q) \neq 0$, kann man auf die folgende Weise zu einem nicht ausgearteten Raum übergehen. Wir setzen $\bar{V} := V/\text{rad}(q)$ und $\bar{q}(\bar{v}, \bar{w}) := q(v, w)$, wenn $v, w \in V$ Repräsentanten von $\bar{v}, \bar{w} \in \bar{V}$ bezeichnen.

Bezüglich einer Basis v_1, \dots, v_n wird q durch eine symmetrische Matrix $Q \in K^{n \times n}$ mit Einträgen $Q_{ij} = q(v_i, v_j)$ beschrieben. Unter Basiswechsel $v'_i = \sum_j S_{ji} v_j$ transformiert sich Q gemäß $Q' = S^t Q S$. Die Form q ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $\det(Q) \neq 0$.

Lemma 4.1 (Existenz einer Orthogonalbasis) — *Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis v_1, \dots, v_n mit $q(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ für gewisse $\lambda_i \in k$.*

Beweis. Die Behauptung ist trivial, wenn $\dim(V) = 1$. Wir nehmen also an, es sei $\dim(V) > 1$, und die Behauptung sei schon für alle Bilinearformen kleinerer Dimension gezeigt. Wenn $q = 0$ ist die Behauptung trivial. Andernfalls gibt es zwei Vektoren v' und v'' mit $q(v', v'') \neq 0$. Aus der Identität (4.1) folgt, daß es einen nichtisotropen Vektor $v_1 \in \{v', v'', v' + v''\}$ gibt. Es sei $V' = v_1^\perp$. Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es

eine eindeutige Zerlegung

$$v = \frac{q(v_1, v)}{q(v_1, v_1)} v_1 + v', \quad \text{mit } v' \in V'.$$

Da $v_1 \notin V'$, besteht eine orthogonale Zerlegung $V = \langle v_1 \rangle \oplus V'$. Nach Induktionsannahme gibt es eine Orthogonalbasis v_2, \dots, v_n von V' , und v_1, \dots, v_n ist eine Orthogonalbasis von V . \square

Zusatz 4.2 (Gram-Schmidt Verfahren) — Ist w_1, \dots, w_n eine Basis mit der Eigenschaft, daß q auf den Räumen $V_i = \langle w_1, \dots, w_i \rangle$ nicht ausgeartet ist, kann man die Orthogonalbasis v_1, \dots, v_n so wählen, daß zusätzlich $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

Beweis. Wir konstruieren v_1, \dots, v_n rekursiv wie folgt: Es sei $v_1 = w_1$ und

$$v_k = w_k - \sum_{i < k} \frac{q(w_k, v_i)}{q(v_i, v_i)} v_i.$$

Damit im nächsten Schritt nicht durch 0 geteilt wird, ist sicherzustellen, daß v_k nicht isotrop ist. Da aber v_k nach Konstruktion senkrecht auf allen $v_i, i < k$, steht und da die Einschränkung von q auf $V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ nicht ausgeartet ist, kann v_k nicht isotrop sein. \square

Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform mit einer Orthogonalbasis v_1, \dots, v_n und Diagonaleinträgen $\lambda_i = q(v_i, v_i)$. Ersetzt man die Basis v_1, \dots, v_n durch skalare Vielfache $v'_i = \mu_i v_i$, ändern sich die Diagonaleinträge zu $\lambda'_i = q(v'_i, v'_i) = \mu_i^2 \lambda_i$.

Satz 4.3 — Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, d.h. eine Basis v_1, \dots, v_n mit $q(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. \square

Satz 4.4 (Sylvesterscher Trägheitssatz) — Es sei $q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Orthogonalbasis v_1, \dots, v_n mit der Eigenschaft, daß die Matrix $Q = (q(v_i, v_j))$ die folgende Gestalt hat:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{n_+} & & \\ \hline & -I_{n_-} & \\ \hline & & O \end{array} \right).$$

Dabei hängen die Zahlen n_+ und n_- nicht von der Wahl der Basis ab. Sie sind als die Dimensionen von maximalen Unterräumen charakterisiert, auf denen q positiv bzw. negativ definit ist. Die Spalten- und Zeilenzahl der Nullmatrix O ist gleich $\dim(\text{rad}(q))$. \square

Im Falle einer positiv oder negativ definiten symmetrischen Bilinearform auf einem reellen Vektorraum kann nur der Nullvektor isotrop sein. Aber schon für eine indefinite reelle Form wie etwa

$$q(x, y) = x^t I_{p,s} y, \quad \text{mit } I_{p,s} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_s \end{array} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^{p+s},$$

gibt es viele isotrope Vektoren. In physikalischen Kontexten spricht man von lichtartigen Vektoren. Sie bilden einen Kegel $C \subset V$, der die offenen Bereiche V_+ und V_- der Vektoren v mit $\tilde{q}(v) > 0$ und $\tilde{q}(v) < 0$ trennt. Man hat Homotopieäquivalenzen $S^{p-1} \rightarrow V_+$ und $S^{q-1} \rightarrow V_-$, wobei S^{p-1} und S^{q-1} die Einheitskugeln in $\mathbb{R}^p \oplus 0$ bzw. $0 \oplus \mathbb{R}^q$ sind.

Satz 4.5 — *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem K -Vektorraum der Dimension $d = 2n$ bzw. $d = 2n + 1$.*

1. Falls $n > 0$, enthält V nichttriviale isotrope Vektoren.
2. Jeder maximale isotrope Unterraum hat die Dimension n .
3. Es sei $W \subset V$ ein isotroper Unterraum. Dann läßt sich jede Basis x_1, \dots, x_m von W so zu einer Basis x_1, \dots, x_d von V ergänzen, daß $q(x_i, x_j) = \delta_{i+j, d+1}$.

Die Matrix zu q bezüglich der Basis x_1, \dots, x_d hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. 1. Es sei v_1, \dots, v_m eine Orthonormalbasis zu q , $m \geq 2$. Dann ist $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ genau dann ein isotroper Vektor, wenn (x_1, \dots, x_m) die quadratische Gleichung $x_1^2 + \dots + x_m^2 = 0$ löst. Eine nichttriviale Lösung ist zum Beispiel $x = (1, \sqrt{-1}, 0, \dots, 0)$.

2. Es sei $W \subset V$ ein isotroper Unterraum. Weil die Form q nicht ausgeartet ist, gilt $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, und aus $W \subset W^\perp$ folgt $\dim W \leq n$. Es sei nun W ein isotroper Unterraum der Dimension $m < n$. Dann ist W ein echter Unterraum in W^\perp der Kodimension ≥ 2 . Nach Schritt 1 besitzt W^\perp/W isotrope Vektoren, und wir können induktiv annehmen, annehmen, daß es in W^\perp/W einen maximalen isotropen Unterraum L' der Dimension $n - m$ gibt. Das Urbild $L \subset W^\perp$ von L' unter der Projektion $W^\perp \rightarrow W^\perp/W$ ist ein isotroper Raum der Dimension n . Speziell für maximale isotrope Unterräume heißt dies, daß sie n -dimensional sein müssen.

3. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß W ein maximaler isotroper Raum ist, also die Dimension n hat. Wir wählen ein Komplement U und unterscheiden die Fälle $\dim U = \dim W$ und $\dim U > \dim W$.

Es sei zunächst $\dim U = n$. Weil W isotrop, aber q nicht ausgeartet ist, muß die Paarung $W \times U$ nicht ausgeartet sein. Man kann also eine Basis y_1, \dots, y_n so wählen, daß $q(x_i, y_j) = \delta_{i+j, n+1} =: J_{ij}$. Wir machen den Ansatz $x_{n+j} = y_j + \sum_k B_{kj} x_k$. Dann gilt $q(x_i, x_{n+j}) = \delta_{i+j, n+1}$ unabhängig von der Wahl von B , welches wir also nur so bestimmen müssen, daß

$$0 = q(x_{n+j}, x_{n+\ell}) = q(y_j, y_\ell) + \sum_k B_{kj} J_{\ell k} + \sum_k B_{k\ell} J_{kj}.$$

Mit der Bezeichnung $Q := (q(y_i, y_j))$ heißt das: B ist so zu wählen, daß $0 = Q + J^t B + B^t J$. Dazu genügt $B := -\frac{1}{2}(J^t)^{-1}Q$.

Der Fall $\dim U = n + 1$ läßt sich auf den früheren Fall zurückführen: Es sei $z \in W^\perp \cap U$ nicht trivial. Dieser Vektor kann nicht isotrop sein, sonst wäre W^\perp isotrop, obwohl $\dim W^\perp > n$. Wir setzen $x_{n+1} := z/\sqrt{q(v, v)}$ und betrachten $V' := x_{n+1}^\perp$. Die Einschränkung $q' := q|_{V'}$ ist nicht ausgeartet, und W ist ein maximaler isotroper Unterraum in V' von halber Dimension. Gemäß dem vorigen Absatz gibt es eine Basis $x_1, \dots, x_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{2n}$ mit $x'_{n+i} \in V' \cap U$ und $q(x_i, x'_{n+j}) = \delta_{i+j, n+1}$ und $q(x'_{n+j}, x_{n+k}) = 0$. Einfaches Ummumerieren liefert eine Basis

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} := x'_{n+1}, \dots, x_{2n+1} := x'_{2n}$$

von V mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Bezeichnet W einen beliebigen Vektorraum und W^* seinen Dualraum, so definiert die Standardpaarung $W \times W^* \rightarrow K$ auf der direkten Summe $W \oplus W^*$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$q((w, \varphi), (w', \varphi')) := \varphi(w') + \varphi'(w).$$

Offenbar sind W und W' maximale isotrope Unterräume. Solche Formen heißen in der Theorie der quadratischen Formen 'hyperbolische Räume'.

Folgerung 4.6 — Ist V ein geradedimensionaler Vektorraum, $\dim V = 2n$, mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform und einem n -dimensionalen isotropen Unterraum W , dann gibt es eine Isometrie $V \rightarrow W \oplus W^*$, die auf W die Identität ist.

4.2 Orthogonale Gruppen

Definition 4.7 — Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Die orthogonale Gruppe zur Form q ist die Untergruppe

$$O(V, q) := \{g \in \text{GL}(V) \mid q(gv, gv') = q(v, v') \text{ für alle } v, v' \in V\} \subset \text{GL}(V).$$

Die spezielle orthogonale Gruppe ist die Untergruppe

$$\text{SO}(V, q) := \{g \in O(V, q) \mid \det(g) = 1\} \subset O(V, q).$$

Im Falle der Standardform $q(v, v') = v^t v'$ auf $V = K^n$ schreiben wir kurz

$$O_n(k) := \{g \in k^{n \times n} \mid g^t g = I_n\} \supset SO_n(k) := \{g \in O_n(k) \mid \det(g) = 1\}.$$

Beispiel 4.8 (Spiegelungen) — Es sei $q : V \times V \rightarrow k$ nicht ausgeartet. Dann ist für jeden nichtisotropen Vektor die Spiegelung an v bzw. an der zu v senkrechten Hyperlebene durch

$$s_v(x) := x - 2 \frac{q(v, x)}{q(v, v)} v$$

definiert. Es gelten die Rechenregeln

1. $s_v(v) = -v$ und $s_v|_{\langle v \rangle^\perp} = \text{id}_{\langle v \rangle^\perp}$, insbesondere ist $s_v \in O(V, q)$ und $s_v^2 = \text{id}_V$.
2. $s_v = s_{\lambda v}$ für alle $\lambda \in k^*$, und $g s_v g^{-1} = s_{g(v)}$ für alle $g \in O(V, q)$.

Satz 4.9 — Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, $n = \dim(V)$. Dann ist jedes Element $g \in O(V, q)$ Produkt von höchstens $2n$ Spiegelungen. Wenn es in V keine nichttrivialen isotropen Vektoren gibt, ist jedes Element Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Beweis. Wir zeigen stärker durch absteigende Induktion: Ist W ein k -dimensionaler Vektorraum mit $g|_W = \text{id}_W$ und der Eigenschaft, daß $q|_W$ nicht ausgeartet ist, so ist g ein Produkt von höchstens $2(n-k)$ Spiegelungen. Die Behauptung ist für $k = n$ trivial. Es sei also ein k -dimensionaler Unterraum W mit diesen Eigenschaften gegeben, und die Behauptung für alle solcher Unterräume größerer Dimension schon gezeigt. Falls $W = V$, ist nichts zu zeigen. Weil q und $q|_W$ nicht ausgeartet sind, gibt es einen Vektor nicht isotropen Vektor $v \in W^\perp$. Weil $g|_W = \text{id}_W$, ist auch $gv \perp W$. Wegen

$$q(gv - v, gv - v) + q(gv + v, gv + v) = 2q(gv, gv) + q(v, v) = 4q(v, v) \neq 0$$

können nicht $gv + v$ und $gv - v$ zugleich isotrop sein. Es sei $a := s_{gv-v}$ falls $gv - v$ nicht isotrop ist, und andernfalls $a := s_{gv+v}$. Dann gilt $a|_W = \text{id}_W$ und $agv = v$. Demnach ist $W' = W \oplus \langle v \rangle$ ein Unterraum, auf dem q nicht ausgeartet ist, mit $ag|_{W'} = \text{id}_{W'}$. Nach Induktion ist (ag) ein Produkt von höchstens $2(n-k-1)$ Spiegelungen und folglich $g = a^{-1}(ag)$ ein Produkt von höchstens $2(n-k)$ Spiegelungen. \square

Aufgabe 4.1 — Es seien $r, s > 0$, $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ und

$$O(r, s) := \{g \in \text{GL}_{r+s}(\mathbb{R}) \mid g^t I_{r,s} g = I_{r,s}\}.$$

Zu zeigen:

1. $O(r, s)$ ist eine Liegruppe der Dimension $\binom{r+s}{2}$.
2. $O(r, s) \cong O(s, r)$.
3. $O(r, s)$ ist nicht kompakt.

4. $O(r, s)$ hat genau vier Zusammenhangskomponenten, die durch das Vorzeichen von $\det(g_{11})$ bzw. $\det(g_{22})$ charakterisiert sind, wenn $g \in O(r, s)$ in der Blockform $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ gegeben ist.
5. $\pi_0(O(r, s)) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

4.3 Universelle Tensorkonstruktionen

Literatur:

Serge Lang: Algebra.

Die freie assoziative Algebra. Es sei K ein Körper. Für K -Vektorräume V und W gibt es einen mit $V \otimes W$ bezeichneten K -Vektorraum und eine bilineare Abbildung $p : V \times W \rightarrow V \otimes W$ mit der universellen Eigenschaft, daß es zu jeder bilinearen Abbildung $\varphi : V \times W \rightarrow U$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bar{\varphi} : V \otimes W \rightarrow U$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ p$ gibt. Das Paar $(V \otimes W, p)$ ist wie stets in solchen Fällen durch die universelle Eigenschaft eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus gekennzeichnet. Man beachte, daß der Raum $V \otimes W$ zwar von Vektoren der Form $v \otimes w := p(v, w)$ aufgespannt wird, daß aber ein beliebiges Element in $V \otimes W$ sich im Allgemeinen nicht so schreiben läßt, sondern vielmehr eine Linearkombination der Form $\sum_i v_i \otimes w_i$ ist.

Aus der Eindeutigkeit des Tensorprodukts folgt dann insbesondere leicht, daß es genau einen Isomorphismus $(V \otimes W) \otimes U \rightarrow V \otimes (W \otimes U)$ mit $(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u)$ gibt. Wir können also im Folgenden alle Klammerungen von Tensorprodukten fortlassen und zum Beispiel $W_1 \otimes \dots \otimes W_n$ für das Tensorprodukt von Räumen W_1, \dots, W_n schreiben. Insbesondere setzen wir $V^{\otimes n}$ für das n -fache Tensorprodukt von V mit sich selbst und vereinbaren $V^{\otimes 0} = K$ und $V^{\otimes 1} = V$. Es gibt dann kanonische Isomorphismen $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \cong V^{\otimes(n+m)}$.

Der graduierte Vektorraum $TV = \bigoplus_{n \geq 0} T^n V$ mit $T^n V = V^{\otimes n}$ mit der kanonischen Verknüpfung $T^n V \times T^m V \rightarrow T^{n+m} V$ heißt Tensoralgebra von V . Sie ist assoziativ und hat die folgende universelle Eigenschaft: Es sei $i : V \rightarrow TV$ der kanonische Isomorphismus auf $T^1 V$. Ist $j : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine beliebige assoziative k -Algebra A mit 1, so gibt es genau einen k -Algebrenhomomorphismus $a : TV \rightarrow A$ mit $a \circ i = j$. Dabei ist $a(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = j(v_1) \dots j(v_n)$. Um diese Eigenschaft zu betonen, spricht man häufig von der freien assoziativen Algebra, die von V frei erzeugt wird. Die Tensoralgebra dient uns als Ausgangspunkt zu zahlreichen algebraischen Konstruktionen.

Besitzt V eine Basis v_1, \dots, v_ℓ , so hat $T^n V$ eine Basis der Form $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$ mit $1 \leq i_j \leq \ell$ für $j = 1, \dots, n$. Insbesondere ist $\dim(T^n V) = \dim(V)^n$.

Die symmetrische Algebra. Es sei $I \subset TV$ das zweiseitige Ideal, das von allen Elementen der Form $x \otimes y - y \otimes x$ mit $x, y \in V$ erzeugt wird. Weil alle Erzeuger homogen vom Grad 2 sind, ist auch das Ideal I homogen, d.h. mit der Bezeichnung

$I^n := I \cap T^n V$ gilt daher $I = \bigoplus_n I^n$. Ebenso sieht man $I^0 = 0$ und $I^1 = 0$. Die assoziative Fatorialgebra $SV := TV/I$ erbt daher eine Graduierung, $SV = \bigoplus_n S^n V$ mit $S^n V = T^n V/I^n$. Außerdem ist $S^0 V = T^1 V = K$ und $S^1 V = T^1 V = V$. Die graduierte Algebra SV heißt symmetrische Algebra von V .

Es bezeichne $\pi : TV \rightarrow SV$ die Projektion. Wir schreiben $v_1 \cdots v_k$ für $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$. Weil

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_k - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k$$

im Ideal J liegt, gilt $v_1 \cdots v_i v_{i+1} \cdots v_k = v_1 \cdots v_{i+1} v_i \cdots v_k$ in $S^k V$. Und weil die Symmetrische Gruppe S_k von Transpositionen erzeugt wird, gilt allgemeiner

$$v_1 \cdots v_k = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}$$

für beliebige Permutationen σ . Daraus folgt unmittelbar: Die Multiplikation in SV ist assoziativ und kommutativ. Wenn wir mit $j : V \rightarrow SV$ die kanonische Inklusion bezeichnen gilt nun analog zum Fall der Tensoralgebra:

Satz 4.10 (Universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra) — *Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow A$ in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ für alle $x, y \in V$ gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F : SV \rightarrow A$ mit $F \circ j = f$. Insbesondere ist $V \xrightarrow{j} SV$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra gibt es nämlich genau einen Algebrenhomomorphismus $\Phi : TV \rightarrow A$ mit $\Phi \circ j = f$. Nach Voraussetzung liegen die Erzeuger $x \otimes y - y \otimes x$ des Ideals I im Kern von Φ . Aber dann liegt auch das ganze zweiseitige Ideal I im Kern von Φ , und Φ muß über Abbildungen $\pi : TV \rightarrow SV$ und $F : SV \rightarrow A$ faktorisieren. Ist andererseits $F' : SV$ irgendeine Algebrenabbildung mit $F' \circ j = f$, so besitzt $F' \circ \pi$ dieselbe Eigenschaft wie Φ , muß also wegen der Eindeutigkeit von Φ mit Φ übereinstimmen. Daraus folgt $F' = F$. \square

Sind A und B graduierte Algebren, so erbt $A \otimes B$ eine Graduierung

$$(A \otimes B)^n := \bigoplus_{k+l=n} A^k \otimes B^l$$

und ein Produkt

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb').$$

Wenn die Produkte in A und B beide assoziativ bzw. kommutativ sind, gilt dasselbe für das Produkt in $A \otimes B$.

Satz 4.11 — *Es gibt genau einen Isomorphismus $S(V \oplus W) \rightarrow SV \otimes SW$ von K -Algebren, der sich auf $V \oplus W$ zur identischen Abbildung nach $V \otimes K \oplus K \otimes W$ einschränkt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $SV \otimes SW$ dieselbe universelle Eigenschaft wie $S(V \oplus W)$ besitzt. Es sei also $f : V \oplus W \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine kommutative und assoziative Algebra mit 1. Dann gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F_V : SV \rightarrow A$, der $f|_V$ fortsetzt, ebenso genau einen Algebrenhomomorphismus $F_W : SW \rightarrow A$, der $f|_W$ fortsetzt. Weil die Bilder $F_V(SV)$ und $F_W(SW)$ untereinander kommutieren, ist die einzig denkbare Fortsetzung $F(a \otimes b) := F_V(a) \cdot F_W(b)$ für $a \in SV$ und $b \in SW$ tatsächlich ein Homomorphismus. Weil jeder Algebrenhomomorphismus $G : SV \otimes SW$ auf $SV \otimes K$ mit F_V und auf $K \otimes SW$ mit F_W übereinstimmen muß, gilt auch $G = F$. \square

Folgerung 4.12 — *Besitzt V eine endliche Basis v_1, \dots, v_n , so hat $S^k V$ eine Basis aus Elementen $v_1^{k_1} \cdots v_n^{k_n}$ mit $k_i \in \mathbb{N}_0$ und $k_1 + \dots + k_n = k$. Insbesondere ist $\dim S^k V = \binom{k+n-1}{n-1}$.*

Beweis. Falls $V = \langle v \rangle$, hat TV eine Basis aus den Elementen $1, v, v^{\otimes 2}, v^{\otimes 3}, \dots$. In diesem Falle ist $I = 0$ und $TV = SV$. Die Behauptung ist dann sicher richtig. Der allgemeine Fall ergibt sich jetzt durch Induktion über die Dimension von V : Ist die Behauptung für V' schon gezeigt, so folgt sie für $V = V' \oplus \langle v \rangle$ aus dem obigen Satz wegen

$$S^k V = S^k V' \oplus S^{k-1} V' v \oplus S^{k-2} V' v^2 \oplus \dots \oplus K v^k.$$

\square

Die äußere Algebra. Es sei $J \subset TV$ das zweiseitige Ideal, das von allen Elementen der Form $x \otimes x$, $x \in V$, erzeugt wird. Weil alle Erzeuger homogen vom Grad 2 sind, ist auch das Ideal J homogen. Mit der Bezeichnung $J^n := J \cap T^n V$ gilt daher $J = \bigoplus_n J^n$. Ebenso sieht man $J^0 = 0$ und $J^1 = 0$. Die assoziative Faktoralgebra $\Lambda V := TV/J$ erbt daher eine Graduierung, $\Lambda V = \bigoplus_n \Lambda^n V$ mit $\Lambda^n V = T^n V / J^n$. Außerdem ist $\Lambda^0 V = T^0 V = K$ und $\Lambda^1 V = T^1 V = V$. Die graduierte Algebra ΛV heißt äußere Algebra von V .

Es bezeichne $\pi : TV \rightarrow \Lambda V$ die Projektion. Wir schreiben $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ für $\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$. Nach Konstruktion ist $v \wedge v = 0$. Wie üblich folgt hieraus

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)}$$

für beliebige Permutationen σ . Die Multiplikation in ΛV ist daher antikommutativ. Es gilt

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \psi \wedge \varphi$$

für homogene Elemente $\varphi, \psi \in \Lambda V$ vom Grad $|\varphi|$ bzw. $|\psi|$. Wenn wir mit $j : V \rightarrow \Lambda V$ wieder die kanonische Inklusion, bezeichnen gilt analog zum Fall der Tensoralgebra und der symmetrischen Algebra:

Satz 4.13 (Universelle Eigenschaft der äußeren Algebra) — *Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow A$ in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft $f(x)^2 = 0$ für*

alle $x \in V$ gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F : \Lambda V \rightarrow A$ mit $F \circ j = f$. Insbesondere ist $V \xrightarrow{j} \Lambda V$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis. Ganz analog zum Fall der symmetrischen Algebra. □

Es seien A und B zwei antikommutative graduierte Algebren. Damit das Tensorprodukt $A \otimes B$ mit der üblichen Graduierung wieder antikommutativ wird, müssen wir es wie folgt abändern:

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|b| \cdot |a'|} (aa') \otimes (bb').$$

Wir bezeichnen das Tensorprodukt der Algebren mit der auf diese Weise abgeänderten Multiplikation durch das Symbol $A \widehat{\otimes} B$.

Satz 4.14 — *Es gibt genau einen Isomorphismus $\Lambda(V \oplus W) \rightarrow \Lambda V \widehat{\otimes} \Lambda W$ von K -Algebren, der sich auf $V \oplus W$ zur identischen Abbildung nach $(V \otimes K) \oplus (K \otimes W)$ einschränkt.*

Beweis. Ganz analog zum Fall der symmetrischen Algebra. □

Folgerung 4.15 — *Besitzt V eine endliche Basis v_1, \dots, v_n , so hat $\Lambda^k V$ eine Basis aus Elementen $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Insbesondere findet man $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ und $\dim \Lambda V = 2^{\dim V}$.*

Beweis. Falls $V = \langle v \rangle$, hat TV eine Basis aus den Elementen $1, v, v^{\otimes 2}, v^{\otimes 3}, \dots$. Weil $v \otimes v$ das Ideal J erzeugt, folgt $\Lambda^0 V = K, \Lambda^1 V = \langle v \rangle$ und $\Lambda^k V = 0$ für $k \geq 2$. Die Behauptung ist in diesem Falle sicher richtig. Der allgemeine Fall ergibt sich jetzt durch Induktion über die Dimension von V : Ist die Behauptung für V' schon gezeigt, so folgt sie für $V = V' \oplus \langle v \rangle$ wegen

$$\Lambda^k V = \Lambda^k V' \wedge 1 \oplus \Lambda^{k-1} V' \wedge v.$$

□

4.4 Cliffordalgebren

Atiyah, Bott, Shapiro: Clifford Modules.

Cliffordalgebren wurden 1876 von William Clifford erfunden mit der Idee, höherdimensionale Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen und der Quaternionen zu schaffen. Es handelt sich um eine auf den ersten Blick kleine Modifikation der Konstruktion der äußeren Algebren, die aber zu einem wesentlich verschiedenen algebraischen Verhalten führen.

Konstruktion der Cliffordalgebren. Dazu sei $q : V \times V \rightarrow k$ eine symmetrische Bilinearform. Wir betrachten in TV das zweiseitige Ideal J , das von allen Elementen der Form

$$v \otimes v - q(v, v) \cdot 1, \quad v \in V$$

erzeugt wird. Gemäß der Polarisierungsformel (4.1) liegen in J auch alle Elemente der Form

$$v \otimes w + w \otimes v - 2q(v, w) \cdot 1.$$

Der Quotient $\text{Cl}(V, q) := TV/J$ ist eine assoziative k -Algebra mit 1, die von den Bildern der kanonischen Abbildung $i : V \rightarrow T^1V \rightarrow V$ erzeugt wird. Wir schreiben die Verknüpfung in $\text{Cl}(V, q)$ mit einem Multiplikationspunkt, oder lassen die Bezeichnung der Verknüpfung ganz weg. Indem wir Elemente $v \in V$ mit ihren Bildern in $\text{Cl}(V, q)$ identifizieren, bestehen also in $\text{Cl}(V, q)$ die Relationen:

$$v^2 = q(v, v) \quad \text{und} \quad vw = -wv + 2q(v, w) \quad \text{für } v, w \in V.$$

Die Multiplikation in $\text{Cl}(V, q)$ ist also im allgemeinen nicht kommutativ. Sind v und w orthogonal, so antikommutieren die Elemente. $\text{Cl}(V, q)$ heißt die Cliffordalgebra zur Form q .

Satz 4.16 (Universelle Eigenschaft der Cliffordalgebren) — *Es sei (V, q) eine symmetrische Bilinearform, $\text{Cl}(V, q)$ die zugeordnete Cliffordalgebra und $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, q)$ die kanonische Abbildung. Ist $f : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft, daß $f(v)^2 = q(v, v)1_A$ für alle $v \in V$, so existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $F : \text{Cl}(V, q) \rightarrow A$ mit $F \circ i = f$. Insbesondere ist $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, q)$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wie früher. □

Die Erzeuger $v \otimes v - q(v, v)$ sind nicht homogen bezüglich der \mathbb{Z} -Graduierung auf TV , wohl aber bezüglich der $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung, die durch Zusammenfassung der geraden und der ungeraden Teile entsteht:

$$TV = \bigoplus_{m \text{ gerade}} T^m V \oplus \bigoplus_{m \text{ ungerade}} T^m V.$$

Das Ideal J ist in diesem Sinne $\mathbb{Z}/2$ homogen, und $\text{Cl}(V, q)$ erbt eine $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung.

$$\text{Cl}(V, q) = \text{Cl}^0(V, q) \oplus \text{Cl}^1(V, q).$$

Elemente in den beiden Summanden heißen gerade bzw. ungerade. Die Summanden werden jeweils von Produkten $v_1 \cdots v_m$ erzeugt, wobei m gerade bzw. ungerade ist.

Da in der Definition der Multiplikation für die Algebren $A \widehat{\otimes} B$ die Graduierung der Elemente nur $\pmod 2$ einging, läßt sich die Definition wörtlich auf den Fall zweier nur $\mathbb{Z}/2$ -graduierter Algebren erweitern. In diesem Sinne gilt:

Satz 4.17 — Ist $V = V' \oplus V''$ eine orthogonale Zerlegung bezüglich der symmetrischen Bilinearform q auf V , so gibt es genau einen Algebrenisomorphismus

$$\text{Cl}(V, q) \longrightarrow \text{Cl}(V', q|_{V'}) \widehat{\otimes} \text{Cl}(V'', q|_{V''}),$$

der auf V' und V'' die Identität induziert.

Beweis. Wie im Falle der äußeren Algebra. Daß die Zerlegung $V' \oplus V''$ orthogonal ist, wird dafür gebraucht, daß Elemente $v' \in V'$ und $v'' \in V''$, die im Tensorprodukt auf der rechten Seite antikommutieren, auch in der Cliffordalgebra auf der linken Seite antikommutieren. \square

Satz 4.18 — Es sei q eine symmetrische Bilinearform auf V und v_1, \dots, v_n eine Orthogonalbasis. Dann bilden die Elemente $v_I := v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, wo $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ die Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft, eine Basis von $\text{Cl}(V, q)$. Insbesondere gilt $\dim \text{Cl}(V, q) = 2^{\dim V}$. Außerdem haben der gerade und der ungerade Teil von $\text{Cl}(V, q)$ dieselbe Dimension. Weiter gelten die Rechenregeln

$$v_i v_j = -v_j v_i \text{ für } i \neq j, \text{ und } v_I v_J = \pm \prod_{i \in I \cap J} \lambda_i \cdot v_{I \Delta J},$$

wobei $\lambda_i := q(v_i, v_i) = v_i^2$ für $i = 1, \dots, n$.

Im Satz bezeichnet $I \Delta J := I \cup J \setminus I \cap J$ die symmetrische Differenz der Indexmengen. Das Vorzeichen $\pm \prod_{i \in I \cap J} \lambda_i \cdot v_{I \Delta J}$ hängt davon ab, wieviele Faktoren aneinander vorbei gezogen werden müssen, um sie in dem zusammengesetzten Produkt $v_I v_J$ zu ordnen.

Beweis des Satzes. Für einen eindimensionalen Vektorraum V mit Basiselement v ist TV zum Polynomring $K[x]$ in einer Unbestimmten isomorph. Das Ideal $J = (v \otimes v - q(v, v))$ entspricht dabei dem Hauptideal $(x^2 - \lambda)$, wenn $\lambda = q(v, v)$. Insbesondere ist $\text{Cl}(V, q) \cong K[x]/(x^2 - \lambda)$ zweidimensional und hat eine Basis aus den Elementen 1 und v . Die Behauptung für den allgemeinen Fall folgt dann aus dem Isomorphismus

$$\text{Cl}(V, q) = \text{Cl}(\langle v_1 \rangle) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \text{Cl}(\langle v_n \rangle)$$

durch Induktion über $\dim(V)$. \square

Beispiel 4.19 — Es sei C_n die Cliffordalgebra zur reellen symmetrischen Bilinearform mit der Matrix $-I_n$ bezüglich der Standardbasis e_1, \dots, e_n auf dem \mathbb{R}^n . Folglich gilt $\dim_{\mathbb{R}} C_n = 2^n$. Genauer gilt:

- $C_0 = \mathbb{R}$
- $C_1 \cong \mathbb{C}$, denn $e_1^2 = -1$.

- $C_2 \cong \mathbb{H}$, wenn wir $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$ und $e_1e_2 \mapsto ij = k$ senden. In der Tat ist $e_1^2 = -1$, $e_2^2 = -1$, $(e_1e_2)^2 = -e_1^2e_2^2 = -1$ und $e_1e_2 = -e_2e_1$.

Zentraleinfache Algebren. Literatur: Draxl: Skew fields. Weil: Basic number theory.

Definition 4.20 — Eine zentral einfache K -Algebra ist eine assoziative K -Algebra mit 1 von endlicher K -Dimension und den folgenden Eigenschaften:

1. A ist einfach, d.h. A besitzt keine zweiseitigen Ideale außer (0) und (1) .
2. $Z(A) = K$.

Beispiele von zentral einfachen Algebren sind endlichdimensionale Schiefkörper mit Zentrum K , Matrizenringe, oder, wie wir in Kürze sehen, gewisse Cliffordalgebren.

Satz 4.21 — Mit A und B ist auch $A \otimes B$ eine zentraleinfache K -Algebra.

Beweis. Es sei $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ ein nichttriviales zentrales Element in $A \otimes B$. Ohne Einschränkung seien die Elemente b_i linear unabhängig. Für jedes $a \in A$ gilt dann

$$0 = (a \otimes 1)x - x \otimes a = \sum_i (aa_i - a_i a) \otimes b_i.$$

Weil die b_i linear unabhängig sind, hat man $aa_i = a_i a$ für jedes i , d.h. alle a_i sind zentrale Elemente in A und somit Skalare aus K . Damit hat x die Form $x = 1 \otimes b$ und ist genau dann zentral, wenn b zentral in B ist. Aber dann ist x ein Skalar. Das zeigt: $Z(A \otimes B) = K$.

Es sei $I \subset A \otimes B$ ein nichttriviales zweiseitiges Ideal und $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ ein nichttriviales Element in I mit minimaler Anzahl n von Summanden. Weil A einfach und $a_1 \neq 0$ ist, gibt es Elemente $c_j, d_j \in A$ mit $\sum_j c_j a_1 d_j = 1$. Dann liegt auch $x' = \sum_j (c_j \otimes 1)x(d_j \otimes 1) = 1 \otimes b_1 + \sum_{i \neq 1} a'_i \otimes b_i$ im Ideal I .

Falls alle $a'_i \in K$, hat x' die Form $x' = 1 \otimes b'$. Weil $(b') = B$, folgt $(1 \otimes b') = A \otimes B$. Falls andererseits $a'_2 \notin K$, gibt es ein a mit $aa'_2 - a'_2 a \neq 0$. Dann widerspricht $x'' := (a \otimes 1)x - x(a \otimes 1) = \sum_{i \geq 2} (aa_i - a_i a) \otimes b_i$ der Minimalität von x . Der Fall tritt also nicht auf. Deshalb ist $A \otimes B$ einfach. \square

Satz 4.22 (Wedderburn) — Für jede zentral einfache K -Algebra gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutigen Schiefkörper D und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \cong M_n(D) \cong D \otimes_K M_n(K)$.

Beweis. Es sei A eine zentral einfache K -Algebra und \mathfrak{a} ein minimales nichttriviales Rechtsideal. Ein solches existiert, weil A endlichdimensional ist. Für jedes $x \in A$ ist die Linksmultiplikation $x \cdot : \mathfrak{a} \rightarrow A$ eine rechts- A -lineare Abbildung. Weil \mathfrak{a} minimal

ist, ist der Kern gleich \mathfrak{a} oder 0, d.h. das Bild ist entweder 0 oder ein zu \mathfrak{a} isomorphes minimales Rechtsideal $x\mathfrak{a}$. Die Summe $\sum_{x \in A} x\mathfrak{a}$ ist ein nichttriviales zweiseitiges Ideal in A , also A . Jede Summe von von minimalen Idealen ist eine direkte Summe von minimalen Idealen über eine endliche Teilmenge der Indexmenge, d.h. es gibt x_1, \dots, x_n mit $A = \bigoplus_i x_i$. Insbesondere ist A als A -Rechtsmodul isomorph zu \mathfrak{a}^n . Jeder Endomorphismus von A als A -Rechtsmodul hat die Form

$$\varphi(a) = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1)a,$$

ist also als Linksmultiplikation mit dem Element $\varphi(1)$ gegeben. Deshalb gibt es Algebrenisomorphismen

$$A \cong \text{End}_A(A_A) \cong \text{End}_A(\mathfrak{a}^n) \cong M_n(\text{End}_A(\mathfrak{a})) = M_n(D).$$

Dabei bezeichnet A_A der Deutlichkeit halber den A -Rechtsmodul A und $D := \text{End}_A(\mathfrak{a})$. Weil \mathfrak{a} minimal ist, ist für jeder Endomorphismus $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ entweder ein Isomorphismus oder die Nullabbildung, weil Kern und Bild von ψ entweder gleich 0 oder gleich \mathfrak{a} sind. Daraus folgt, daß D ein Schiefkörper ist. \square

Satz 4.23 (Artin-Whaples) — *Ist A zentral einfach, so ist auch die entgegengesetzte Algebra A^{op} , d.h. A mit der Multiplikation $a \circ b := ba$, zentral einfach, und es gilt $A \otimes A^{\text{op}} \cong \text{End}_K(A) = M_{\dim A}(K)$.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Die Abbildung $\psi : A \otimes A^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_K(A)$, $\psi(a \otimes b) : x \mapsto axb$, ist ein nichttrivialer K -linearer Algebrenhomomorphismus. Der Kern von ψ ist ein zweiseitiges echtes Ideal von $A \otimes A^{\text{op}}$, und weil $A \otimes A^{\text{op}}$ einfach ist, ist $\ker(\psi) = 0$. Und weil $A \otimes A^{\text{op}}$ und $\text{End}_K(A)$ dieselbe Vektorraumdimension haben, ist ψ ein Isomorphismus. \square

Insbesondere ist das Tensorprodukt $D' \otimes_K D''$ zweier Schiefkörper mit Zentrum K im allgemeinen zwar kein Schiefkörper mehr, es gibt aber einen eindeutig bestimmten Schiefkörper D mit $D' \otimes_K D'' \cong M_n(D)$. Das legt die folgende Konstruktion nahe: Zwei zentral einfache K -Algebren A und B heißen äquivalent, wenn $M_n(A) \cong M_m(B)$ für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$. Dann liegt in jeder Äquivalenzklasse genau ein Schiefkörper. Es bezeichne $\text{Br}(K)$ die Menge der Äquivalenzklassen von zentral einfachen K -Algebren. Darauf ist durch $[A] \cdot [B] := [A \otimes_K B]$ eine wohldefinierte kommutative und assoziative Verknüpfung mit Neutralelement $[K]$ gegeben. Nach dem Satz von Artin-Whaples ist $[A^{\text{op}}]$ ein Inverses zu $[A]$. Mit dieser Verknüpfung versehen, wird $\text{Br}(K)$ zu einer Gruppe, der Brauergruppe des Körpers K .

Beispiele 4.24 — 1. Die einzigen Schiefkörper von endlicher Dimension über \mathbb{R} sind \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H} . Davon sind nur \mathbb{R} und \mathbb{H} zentral einfache \mathbb{R} -Algebren, denn \mathbb{C} hat das Zentrum \mathbb{C} . Konjugation ist ein Algebrenisomorphismus $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{\text{op}}$. Mit dem Satz von

Artin-Whaples folgt

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\text{op}} \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}.$$

Deshalb ist $[\mathbb{H}]^2 = [\mathbb{H}][\mathbb{H}^{\text{op}}] = [\mathbb{R}]$. Insgesamt ist $\text{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$.

2. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist $\text{Br}(K) = 0$. Dazu ist zu zeigen, daß es keine Schiefkörper D mit Zentrum K von endlicher Dimension $[D : K] > 1$ gibt. Andernfalls wählen wir $a \in D \setminus K$. Dann ist $K[a] \subset D$ ein Integritätsbereich von endlicher Vektorraumdimension über K , also eine endliche Körpererweiterung, im Widerspruch dazu, daß K algebraisch abgeschlossen ist.

3. Ist K ein endlicher Körper, so ist $\text{Br}(K) = 0$. Das ist eine Konsequenz eines Satzes von Wedderburn: Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ. Einen Beweis findet man auf der ersten Seite des Buches *Basic Number Theory* von André Weil.

4. Brauergruppen von Zahlkörpern sind sehr groß.

Struktur der Cliffordalgebren. Im Folgenden sei (V, q) eine nicht ausgeartete Bilinearform über einem Körper K und $C = \text{Cl}(V, q)$ die zugehörige Cliffordalgebra mit der Zerlegung $C = C^0 \oplus C^1$ in ihren geraden und ungeraden Anteil. Wir fixieren eine orthogonale Basis v_1, \dots, v_n und setzen zur Abkürzung $[n] := \{1, \dots, n\}$ und $\omega := v_{[n]} = v_1 \cdots v_n$. Weiter sei

$$v_i^2 =: \lambda_i \quad \text{und} \quad \omega^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n =: \Delta.$$

Weil q als nicht ausgeartet vorausgesetzt ist, sind alle v_I , $I \subset [n]$, invertierbar, zum Beispiel gilt

$$v_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i} v_i, \quad v_{ij}^{-1} = -\frac{1}{\lambda_i \lambda_j} v_{ij}.$$

Unter Konjugation $v_J \mapsto v_I v_J v_I^{-1}$ geht v_J bis aufs Vorzeichen in sich über, und das Vorzeichen hängt von Anzahl der Paare $(i, j) \in I \times J$ von *verschiedenen* Indizes i und j ab. Genauer gilt

$$v_I v_J v_I^{-1} = (-1)^{|I| \cdot |J| - |I \cap J|} v_J.$$

Im Folgenden bezeichnet $Z(A)$ das Zentrum einer assoziativen K -Algebra A , also die Unteralgebra aller Elemente, die mit allen anderen Elementen von A vertauschen, und allgemeiner $Z_A(B)$ den Zentralisator einer Teilmenge $B \subset A$, das ist die Unteralgebra aller Elemente in A , die mit allen Elementen von B vertauschen.

Lemma 4.25 — *Es gilt:*

1. $Z_C(C^0) = k \oplus k\omega$.
2. Falls $\dim(V)$ gerade: $Z(C) = k$ und $Z(C^0) = k \oplus k\omega$.
3. Falls $\dim(V)$ ungerade: $Z(C) = k \oplus k\omega$ und $Z(C^0) = k$.

Beweis. Ein Element $a = \sum_I a_I v_I$ liegt genau dann in $Z(C)$, $Z(C^0)$ bzw. $Z_C(C^0)$, wenn dies für jedes in a mit nichttrivalem Koeffizienten vorkommende Monom v_I gilt.

Das Monom v_J liegt genau dann in $Z_C(C^0)$, wenn $v_{ij} v_J v_{ij}^{-1} = v_J$ für alle zweielementigen Teilmengen $\{i, j\} \subset [n]$, was nach der Vorüberlegung auf die äquivalente Bedingung $2|J| + |J \cap \{i, j\}| \equiv |J \cap \{i, j\}| \equiv 0 \pmod{2}$ für alle $i \neq j$ führt. Offenbar muß J also jede zweielementige Indexmenge entweder enthalten oder zu ihr disjunkt sein. Das trifft genau auf die Mengen $J = \emptyset$ und $J = [n]$ zu. Das zeigt $Z_C(C^0) = k \oplus k\omega$.

Die Behauptungen über $Z(C^0)$ ergeben sich daraus wegen $Z(C^0) = C^0 \cap Z_C(C^0)$. Und Monome $v_J \in Z(C) \subset Z_C(C^0)$ zeichnen sich durch die zusätzliche Eigenschaft $v_i v_J v_i^{-1} = v_J$ also $|J| + |J \cap \{i\}| \equiv 0 \pmod{2}$ für alle $i \in [n]$ aus. Diese Bedingung ist für $J = \emptyset$ immer erfüllt und für $J = [n]$ genau dann, wenn n ungerade ist. \square

Wir können das Lemma verwenden, um die Abhängigkeit des Elements $v_{[n]}$ von der Wahl der Orthogonalbasis v_1, \dots, v_n zu klären. Dazu betrachten wir eine zweite Orthogonalbasis v'_1, \dots, v'_n , deren Relation zur ersten durch die Gleichungen $v'_i = \sum_j B_{ji} v_j$ wiedergegeben wird. Man erhält

$$\omega' := v'_1 \cdots v'_n = \det(B)\omega + \sum_{J \neq [n]} \mu_J v_J.$$

Weil aber ω' gemäß den obigen Überlegungen im Zentralisator von C^0 liegt, der von ω und 1 aufgespannt wird, kann dies nur $\omega' = \det(B)\omega + \beta$ für ein $\beta \in k$ bedeuten. Quadrieren liefert $\Delta' := \omega'^2 = (\beta^2 + \det(B)^2 \Delta) + 2\beta \det(B)\omega \in k$. Somit ist $\beta = 0$. Zusammengefaßt: $\omega' = \det(B)\omega$ und $\Delta' = \det(B)^2 \Delta$. Insbesondere ist die Restklasse von

$$\Delta := (1)^{\binom{n}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

in $K^\times / K^{\times 2}$ unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis und heißt die *Diskriminante* der Form q . Die Bedeutung der Diskriminante ist die folgende: Das Element ω ist Nullstelle des Polynoms $T^2 - \Delta \in K[T]$. Wenn die Diskriminante nicht verschwindet, ist dieses Polynom irreduzibel und somit $\tilde{K} := K \oplus K\omega \cong K[\sqrt{\Delta}]$ eine quadratische Körpererweiterung von K . Wenn dagegen die Diskriminante verschwindet, gibt es in K eine Quadratwurzel μ von Δ , und wir können die Elemente

$$u_\pm := \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\omega}{\mu} \right)$$

mit den Eigenschaften $u_+ + u_- = 1$, $u_+ u_- = 0$, $u_+^2 = u_+$, $u_-^2 = u_-$ bilden. Die Elemente u_+ und u_- sind also Idempotente und führen zu einer Zerlegung

$$K \oplus K\omega = Ku_+ \times Ku_-.$$

Die Existenz einer solchen Zerlegung und bis auf eine Vertauschung der Faktoren auch die Zerlegung selbst sind unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis.

Lemma 4.26 — *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

1. Wenn $\dim V$ gerade ist oder $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C eine einfache Algebra. Andernfalls ist $C = Cu_+ \times Cu_-$ eine Zerlegung in ein Produkt von einfachen Algebren.
2. Wenn $\dim V$ ungerade ist oder $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C^0 eine einfache Algebra. Andernfalls ist $C^0 = C^0u_+ \times C^0u_-$ eine Zerlegung in ein Produkt von einfachen Algebren.

Beweis. 1. Es sei \mathfrak{a} ein nichttriviales zweiseitiges Ideal in C . Sobald \mathfrak{a} ein einzelnes Monom v_I enthält, ist \mathfrak{a} das Einsideal, weil $I \ni v_I^2 = (-1)^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i \in I} \lambda_i$. Wir betrachten also ein Element $a = \sum_J a_J v_J \in \mathfrak{a}$ mit einer minimalen Anzahl von in a tatsächlich vorkommenden Monomen und nehmen an, diese Anzahl sei ≥ 2 .

Für jeden Index i liegt auch $a \pm v_i a v_i^{-1}$ in \mathfrak{a} . Damit diese neuen Idealelemente der Minimalität von a nicht widersprechen, müssen für alle in a vorkommenden Monome v_J die Vorzeichen in

$$v_i v_J v_i^{-1} = \pm v_J$$

für jedes i jeweils gleich ausfallen. D.h. die Parität von $|J| - |J \cap \{i\}|$ muß für alle Monome v_J in a jeweils gleich sein. Es seien v_J und v_K verschiedene in a vorkommende Monome. Indem man $i \in J \setminus K$ oder $i \in K \setminus J$ wählt, sieht man, daß $|J|$ und $|K|$ verschiedene Parität haben müssen. Wenn es $i \in J \cap K$ oder $i \in [n] \setminus (J \cup K)$ gibt, müssen $|J|$ und $|K|$ dagegen gleiche Parität haben. Das ist nur möglich, wenn n ungerade ist und J und K komplementäre Teilmengen in $[n]$ sind. Das Element a hat dann die Form $a = \alpha v_J + \beta v_{\bar{J}}$ mit $\bar{J} = [n] \setminus J$. In diesem Fall enthält \mathfrak{a} auch das Element

$$(\alpha v_J + \beta v_{\bar{J}})(\alpha v_J - \beta v_{\bar{J}}) = \alpha^2 - \beta^2 v_{[n]}.$$

Wir schließen: Ein nichttriviales zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a} \subset C$ ist entweder das Einsideal, oder n ist ungerade und \mathfrak{a} enthält ein Element $u = \alpha + \beta v_{[n]}$ mit $\alpha\beta \neq 0$. Wir untersuchen den zweiten Fall genauer. Mit u liegt auch $uv_{[n]} = \lambda\beta + \alpha v_{[n]}$ in \mathfrak{a} . Wenn die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 \lambda$$

nicht verschwindet, erhält man aus u und $uv_{[n]}$ durch Linearkombination das Einselement, so daß \mathfrak{a} wieder das Einselement ist. Andernfalls besitzt λ in K eine Quadratwurzel, d.h. die Form q hat eine triviale Diskriminante. Die gerade geführte Rechnung zeigt, daß in diesem Falle \mathfrak{a} eine der beiden früher definierten Idempotenten $u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\mu} v_{[n]} \right)$ enthält. Das Ideal \mathfrak{a} ist also eine der beiden Komponenten der Zerlegung $C = Cu_+ \times Cu_-$.

2. Die Argumentation verläuft für C^0 völlig parallel: Wir müssen für Monome v_J mit ausschließlich geradem $|J|$ das Vorzeichenverhalten von $v_i v_J v_i^{-1} = \pm v_J$ untersuchen. Das Vorzeichen hängt nur von der Parität von $|J \cap \{i, j\}|$ ab. Das zwei

verschiedene Monome J und K dasselbe Vorzeichenverhalten für alle zweielementigen Teilmengen haben, ist nur möglich, wenn n gerade ist und $K = \overline{J}$, usw. \square

Wir fassen die Ergebnisse der obigen Diskussion wie folgt zusammen:

Satz 4.27 — Es sei (V, q) eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform über dem Körper K mit Diskriminante $\Delta \in K^*$ und C die zugehörige Cliffordalgebra.

1. Wenn $\dim(V)$ gerade ist, ist C eine zentrale einfache K -Algebra.
2. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist und $\Delta \notin K^{\times 2}$ hat, ist C eine zentrale einfache $K[\sqrt{\Delta}]$ -Algebra.
3. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist und $\Delta \in K^{\times 2}$, so gibt es in C eine Zerlegung $1 = u_- + u_+$ in Idempotente und eine Produktzerlegung $C \cong C u_- \times C u_+$ mit zentrale einfachen K -Algebren $C u_{\pm}$.

Satz 4.28 — Es sei (V, q) eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform über dem Körper K mit Diskriminante $\Delta \in K^*$ und C die zugehörige Cliffordalgebra. Es bezeichne $C^0 \subset C$ die Unter algebra der geraden Elemente.

1. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist, ist C^0 eine zentrale einfache K -Algebra.
2. Wenn $\dim(V)$ gerade ist und $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C^0 eine zentrale einfache $K[\sqrt{\Delta}]$ -Algebra.
3. Wenn $\dim(V)$ gerade ist und $\Delta \in K^{\times 2}$, gibt es in C^0 eine Zerlegung $1 = u_- + u_+$ in Idempotente und eine Produktzerlegung $C^0 \cong C^0 u_- \times C^0 u_+$ mit zentrale einfachen K -Algebren $C^0 u_{\pm}$.

Die Beobachtung, daß man für C und C^0 ähnliche Strukturaussagen erhält, die gewissermaßen lediglich in der Dimension der Ausgangsform um 1 verschoben sind, kann man zumindest für gewisse Fälle wie folgt präzisieren und erklären:

Lemma 4.29 — Es sei (V, q) eine symmetrische Bilinearform und $q' := \langle -1 \rangle \oplus q$ die Form $\tilde{q}'((\lambda, v), (\lambda', v')) = -\lambda\lambda' + q(v, v')$ auf dem Vektorraum $V' = ke_0 \oplus V$. Dann induziert die Abbildung $V \rightarrow \text{Cl}(V', q')$, $v \mapsto e_0 v$, einen Isomorphismus von k -Algebren $\varphi : \text{Cl}(V, q) \rightarrow \text{Cl}^0(V', q')$.

Beweis. Für $\varphi(v) := e_0 v$ gilt: $\varphi(v)^2 = e_0 v e_0 v = -e_0^2 v^2 = q(v, v)$. Wegen der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra setzt sich die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow \text{Cl}^0(V', q')$ zu einem Algebrenhomomorphismus $\varphi : \text{Cl}(V, q) \rightarrow \text{Cl}^0(V', q')$ fort. Das Bild enthält alle Elemente der Form $e_i v$ und $vv' = (e_0 v)(e_0 v')$. Da diese $\text{Cl}^0(V', q')$ erzeugen, ist φ surjektiv. Beide Algebren haben dieselbe k -Dimension. Deshalb ist φ ein Isomorphismus. \square

Cliffordalgebren über \mathbb{R} und \mathbb{C} . Es bezeichne I_n die Einheitsmatrix vom Rang n und C_n die reelle Cliffordalgebra zur quadratischen Form $-I_n$, sowie C'_n die reelle Cliffordalgebra zur quadratischen Form I_n . Die Cliffordalgebren C_n und C'_n stehen in der folgenden Rekursionsrelation zueinander:

Lemma 4.30 — $C_n \otimes C'_2 \cong C'_{n+2}$ und $C'_n \otimes C_2 \cong C_{n+2}$.

Beweis. Es sei $f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow C'_n \otimes C_2$ die lineare Abbildung mit $e_i \mapsto 1 \otimes e_i$ für $i = 1, 2$ und $e_i \mapsto e_i \otimes e_1 e_2$ für $i > 2$. Dann antikommutieren $f(e_i)$ und $f(e_j)$ für $i \neq j$, und $f(e_i)^2 = -1$ für alle i . Deshalb setzt sich f zu einem Algebrenhomomorphismus $F : C_{n+2} \rightarrow C_n \otimes C'_2$ fort. Da das Bild alle Erzeuger $e_j \otimes 1$ und $1 \otimes e_i$ enthält, ist F surjektiv und aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Analog im anderen Fall. \square

Satz 4.31 — Die Cliffordalgebren C_n und C'_n sind für kleine n wie folgt gegeben:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \times M_8(\mathbb{R})$
C'_n	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \times M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$

Weiter gilt $C_{n+8} \cong C_n \otimes_{\mathbb{R}} M_{16}(\mathbb{R})$ und $C'_{n+8} \cong C'_n \otimes_{\mathbb{R}} M_{16}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir wissen schon, daß $C_1 = \mathbb{C}$, $C_2 = \mathbb{H}$ und $C'_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ mit $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ induziert einen Isomorphismus $C'_2 \cong M_2(\mathbb{R})$. Das liefert die ersten drei Spalten in der Tabelle des Satzes. Daraus erhält man die sukzessive die anderen Spalten mit Hilfe des obigen Lemmas und der Relationen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{R})$ sowie $M_m(K) \otimes M_n(K') \cong M_{mn}(K \otimes K')$. Die letzte Behauptung folgt aus $C_{n+4} \cong (C_n \otimes C'_2) \otimes C_2 \cong C_n \otimes (C'_2 \otimes C_2)$ und $C_2 \otimes C'_2 \cong M_2(\mathbb{H})$ und $M_2(\mathbb{H}) \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong M_{16}(\mathbb{R})$. Ebenso für C'_n . \square

Über den komplexen Zahlen ist jede nicht ausgeartete quadratische Form isomorph zur Standardform. Die Cliffordalgebra zu einer n -dimensionalen nicht ausgearteten Form ist deshalb isomorph zu $C_n \otimes \mathbb{C} \cong C'_n \otimes \mathbb{C}$. Wegen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$ erhält man daher durch Komplexifizieren der Tabelle aus Satz 4.31 direkt das folgende Resultat. Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus Satz 4.27 und dem Satz von Wedderburn 4.22.

Satz 4.32 — Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$C_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \begin{cases} M_{2^{n/2}}(\mathbb{C}) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ M_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) \times M_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

\square

4.5 Spingruppen

Dieser Abschnitt folgt der Arbeit von Atiyah, Bott, Shapiro: Clifford Modules.

Wie früher bezeichne $C = C_n$ die Cliffordalgebra zur Bilinearform $q(x, y) = -x^t y$ auf $V = \mathbb{R}^n$. Auf C gibt es einen natürlichen Automorphismus

$$\alpha : C \rightarrow C, \quad \alpha(v_1 \cdots v_m) = (-1)^m v_1 \cdots v_m,$$

d.h. $\alpha|_{C^0} = \text{id}_{C^0}$ und $\alpha|_{C^1} = \text{id}_{C^1}$, und einen natürlichen Antiautomorphismus

$$(\)^t : C \rightarrow C, \quad (v_1 \cdots v_m)^t = v_m \cdots v_1.$$

Wir schreiben $\bar{x} = \alpha(x^t) = \alpha(x)^t$ für die Komposition. Es gilt also $\bar{\bar{v}} = -v$ für $v \in V$ und $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ für allgemeine $x, y \in C$.

Satz 4.33 — 1. Die Menge $\Gamma := \{x \in C^\times \mid \alpha(x)vx^{-1} \in V \text{ für alle } v \in V\}$ ist eine Untergruppe der Einheitsgruppe C^\times und heißt Clifford-Gruppe zur Form q .

2. Für jedes $x \in \Gamma$ ist die Abbildung $\rho(x) : v \mapsto \alpha(x)vx^{-1}$ eine orthogonale Abbildung von V in sich, und $\rho : \Gamma \rightarrow O(V, q)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

3. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ liegt in Γ , und $\rho(v) = s_v$.

4. Die Sequenz $1 \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\rho} O(n) \rightarrow 1$ ist exakt.

Beweis. 1. Weil α ein Ringhomomorphismus ist, gilt $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ für alle $x, y \in C^\times$. Außerdem ist $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Deshalb liegt mit x und y auch xy in Γ und es gilt $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$. Weiter folgt für $x \in \Gamma$ mit der Bezeichnung $w = \alpha(x)vx^{-1}$ auch $\alpha(x^{-1})w(x^{-1})^{-1} = v$. Deshalb läßt sich v aus $w = \rho(x)(v)$ rekonstruieren, und $\rho(x)$ ist ein Isomorphismus. Weiter durchläuft mit v auch $w = \rho(x)(v)$ ganz V . Das zeigt, daß $x^{-1} \in \Gamma$. Daraus folgt die erste Behauptung, und daß ρ ein Gruppenhomomorphismus ist.

2. Weiter erhält man aus $w = \alpha(x)vx^{-1}$ durch Anwenden des Homomorphismus α die Relation $-w = \alpha(w) = x\alpha(v)\alpha(x)^{-1} = -xv\alpha(x)^{-1}$ und hieraus

$$|w|^2 = -w^2 = (\alpha(x)vx^{-1})(xv\alpha(x)^{-1}) = \alpha(x)v^2\alpha(x)^{-1} = -|v|^2.$$

Folglich ist $\rho(x)$ eine orthogonale Transformation.

3. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist in C invertierbar mit Inversem $v^{-1} = -v/|v|^2$, so daß

$$\rho(v)(w) = \frac{-vw(-v)}{|v|^2} = w - 2\frac{q(v, w)}{q(v, v)}v = s_v(w) \in V$$

für jedes $w \in V$. Weil jede orthogonale Abbildung sich als Produkt von Spiegelungen schreiben läßt, ist ρ surjektiv.

4. Es ist klar, daß \mathbb{R}^* im Kern von ρ liegt. Es sei umgekehrt $x \in \ker(\rho)$, d.h. $\alpha(x)v = vx$ für alle $v \in V$. Mit der Gradzerlegung $x = x^0 + x^1$ übersetzt sich dies

in die Relationen $x^0v = vx^0$ und $-x^1v = vx^1$ für alle $v \in V$. Aber dann ist x^0 ein gerades Element im Zentrum von C und daher ein Skalar, und x^1 ist ein ungerades Element, das mit C^0 vertauscht. Nach Lemma 4.25 geht das nur, wenn x^1 ein Vielfaches von ω ist (in der Notation des Lemmas) und wenn $\dim(V)$ ungerade ist. Aber dann würde x^1 sogar mit ganz C vertauschen. Also ist $x^1 = 0$. \square

Satz 4.34 — 1. Für jedes $x \in \Gamma$ liegt $N(x) := x\bar{x}$ in \mathbb{R}^* . Die Abbildung $N : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Es sei $\text{Pin}(n) := \ker(N)$. Dann ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Pin}(n) \xrightarrow{\rho} \text{O}(n) \longrightarrow 1$$

exakt.

3. Es sei $\text{Spin}(n) := \rho^{-1}\text{SO}(n)$. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Spin}(n) \xrightarrow{\rho} \text{SO}(n) \longrightarrow 1$$

exakt. Für $n \geq 2$ ist $\text{Spin}(n)$ wegzusammenhängend. Insbesondere ist $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ für $n \geq 3$ die universelle Überlagerung.

Beweis. Für $x \in \Gamma$ und $v \in V$ gilt

$$\alpha(\bar{x})v(\bar{x})^{-1} = x^t v \alpha(x^{-1})^t = (\alpha(x^{-1})v^t x)^t = \alpha(x^{-1})v x.$$

Das zeigt, daß $\bar{x} \in \Gamma$ und daß $\rho(\bar{x}) = \rho(x)^{-1}$. Insbesondere ist $\rho(N(x)) = \rho(x\bar{x}) = \text{id}_V$. Mit anderen Worten, $N(\Gamma) \subset \ker(\rho) = K^*$. Nun folgt $N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = x(y\bar{y})\bar{x} = (x\bar{x})(y\bar{y}) = N(x)N(y)$. Die Komposition $\mathbb{R}^* \rightarrow \Gamma \xrightarrow{N} \mathbb{R}^*$ ist die Abbildung $a \mapsto a^2$ mit Kern $\{\pm 1\}$. Deshalb ist auch $\ker(\rho|_{\text{Pin}(V,q)}) = \{\pm 1\}$. Jeder Einheitsvektor $v \in V$ liegt in $\text{Pin}(n)$. Weil $\rho(v)$ die Spiegelung an v ist, ist auch $\rho : \text{Pin}(n) \rightarrow \text{O}(n)$ surjektiv.

Es genügt zu zeigen, daß es für $n \geq 2$ einen Weg in $\text{Spin}(n)$ gibt, der 1 und -1 verbindet. Es seien dazu e_0 und e_1 zwei orthogonale normierte Vektoren in V und $v_t = \cos(t)e_0 + \sin(t)e_1$. Dann liegen auf dem stetigen Weg $\gamma(t) := -v_t v_0$ in $\text{Spin}(n)$ die Punkte $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\pi) = -1$. \square

Wir konstruieren zum Schluß noch explizite Modelle für die komplexen Spindarstellungen von $\text{Spin}(n)$:

Es sei $n = 2m$ gerade. Wir wählen einen Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong W \oplus W^*$ von quadratischen Formen. Die Cliffordalgebra zu \mathbb{C}^n wird also von Elementen $w \in W$ und $\varphi \in W^*$ mit den Relationen

$$ww' + w'w = 0, \quad \varphi\varphi' + \varphi'\varphi = 0, \quad \varphi w + w\varphi = 2\varphi(w),$$

für $w, w' \in W$, $\varphi, \varphi' \in W^*$ erzeugt. Wir konstruieren auf dem 2^m -dimensionalen Vektorraum $M := \Lambda W$ Wirkungen der äußeren Algebren ΛW und ΛW^* wie folgt:

Für $w \in W$ bezeichne $e_w : M \rightarrow M, u \mapsto w \wedge u$, die äußere Multiplikation mit w . Offensichtlich ist $e_w^2 = 0$, und deshalb ist $\Lambda W \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M), w \mapsto e_w$, eine wohldefinierte Darstellung. Für $\varphi \in W^*$ ist die innere Multiplikation $i_\varphi : M \rightarrow M$ durch Kontraktion mit φ definiert:

$$i_\varphi(u_1 \wedge \dots \wedge u_\ell) = \sum_i (-1)^{i-1} \varphi(u_i) u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_i \wedge \dots \wedge u_\ell$$

gegeben. Dabei bedeutet $\hat{}$ wie üblich, daß der entsprechende Faktor ausgelassen wird. Wieder gilt $i_\varphi^2 = 0$, so daß $\Lambda W^* \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M), \varphi \mapsto i_\varphi$ eine wohldefinierte Darstellung ist. Man verifiziert schließlich $i_\varphi e_w + e_w i_\varphi = \varphi(w) \text{id}_M$.

Nach der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra gibt es genau einen \mathbb{C} -Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : \text{Cl}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$$

mit $(w, \varphi) \mapsto \sqrt{2}(e_w + i_\varphi)$. Der Homomorphismus Φ muß injektiv sein, weil sonst der Kern ein echtes zweiseitiges Ideal der einfachen Algebra $C_n^{\mathbb{C}}$ wäre. Andererseits haben beide Seiten dieselbe Vektorraumdimension $2^n = (2^m)^2$. Folglich ist Φ ein Isomorphismus.

Es sei $M = M^0 \oplus M^1$ die Zerlegung der äußeren Algebra in ihre geraden und ungeraden Teile. Da e_w den Grad um genau 1 erhöht und i_φ den Grad um genau 1 senkt, hat man $\Phi(\mathbb{C}^n) : M^0 \rightarrow M^1, M^1 \rightarrow M^0$. Insbesondere sind M^0 und M^1 Untermoduln von M bezüglich der Unter algebra $\text{Cl}^0(\mathbb{C}^n)$. Weil $\text{Spin}(n)$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\text{Cl}^0(\mathbb{C}^n)$ erhält man zwei Darstellungen von $\text{Spin}(2m)$ auf den 2^{m-1} -dimensionalen Vektorräumen M^0 und M^1 .

Schließlich besteht für ungerades $n = 2m + 1$ der Isomorphismus $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \cong \text{Cl}^0(\mathbb{C}^{2m+1})$, so daß wir $\text{Spin}(2m + 1)$ als Untergruppe der Einheitengruppe von $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$ auffassen können. Der gerade definierte Modul M ist also eine 2^m -dimensionale Darstellung von $\text{Spin}(2m + 1)$.

Zusammengefaßt liefert diese Konstruktion also eine Darstellung

$$\rho : \text{Spin}(2m + 1) \longrightarrow \text{SO}_{2^m}(\mathbb{C})$$

und zwei Darstellungen

$$\rho_+, \rho_- : \text{Spin}(2m) \longrightarrow \text{SO}_{2^{m-1}}(\mathbb{C}).$$