

1 Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$T_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto b + x,$$

die Verschiebung oder Translation um b . Offenbar gilt

$$T_b \circ T_{b'} = T_{b+b'}, \quad T_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad T_b^{-1} = T_{-b}.$$

Die Translationen bilden also eine Gruppe, die auf \mathbb{R}^n operiert.

Eine σ -Algebra $\mathfrak{A} \subset P(\mathbb{R}^n)$ ist translationsinvariant, wenn aus $A \in \mathfrak{A}$ folgt $T_b(A) \in \mathfrak{A}$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$. Ein Maß $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ auf einer translationsinvarianten σ -Algebra heißt translationsinvariant, wenn $\nu(T_b(A)) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und alle $b \in \mathbb{R}^n$. Weil offene Mengen unter Translationen wieder in offene Mengen abgebildet werden, ist die σ -Algebra der Borel-meßbaren Mengen translationsinvariant.

Satz 1.1 — Die σ -Algebra \mathfrak{M} der Lebesgue-meßbaren Teilmengen im \mathbb{R}^n ist translationsinvariant. Das Lebesgue-Maß $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ ist translationsinvariant.

Beweis. Es ist klar, daß $\mu(T_b(Q)) = \mu(Q)$ für jeden Quader Q und jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Für jede abzählbare Überdeckung $X \subset \bigcup_m Q_m$ durch halboffene Quader folgt: $T_b(X) \subset \bigcup_m T_b(Q_m)$, und mit der σ -Subadditivität von μ erhält man: $\mu^*(T_b(X)) \leq \sum_m \mu(T_b(Q_m)) = \sum_m \mu(Q_m)$. Im Übergang zum Infimum über alle solche Überdeckungen bleibt: $\mu^*(T_b(X)) \leq \mu^*(X)$. Wendet man die Ungleichung auf $T_b(X)$ statt X und T_{-b} statt T_b an, erhält man die umgekehrte Ungleichung $\mu^*(X) = \mu(T_{-b}(T_b(X))) \leq \mu^*(T_b(X))$. Das zeigt: $\mu^*(T_b(X)) = \mu^*(X)$ für alle $X \subset \mathbb{R}^n$ und alle $b \in \mathbb{R}^n$. In anderen Worten: Das äußere Maß μ^* ist translationsinvariant.

Für eine beliebige Lebesgue-meßbare Menge A , einen beliebigen Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$ und eine beliebige Testmenge X folgt:

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(T_{-b}(X)) = \mu^*(T_{-b}(X) \cap A) + \mu^*(T_{-b}(X) \setminus A) \\ &= \mu^*(T_b(T_{-b}(X) \cap A)) + \mu^*(T_b(T_{-b}(X) \setminus A)) \\ &= \mu^*(X \cap T_b(A)) + \mu^*(X \setminus T_b(A)). \end{aligned}$$

Demnach ist $T_b(A)$ Lebesgue-meßbar, also \mathfrak{M} translationsinvariant. Daß das Lebesgue-maß translationsinvariant ist, ergibt sich dann aus der Invarianz des äußeren Maßes. \square

Satz 1.2 — Zu jedem translationsinvarianten Maß ν auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B} \subset P(\mathbb{R}^n)$ mit $\nu(Q) < \infty$ für wenigstens einen Quader Q gibt es eine Konstante $c \in [0, \infty)$ mit $\nu(A) = c\mu(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{B}$.

Beweis. 1. Es sei Q ein Quader mit $\nu(Q) < \infty$. Weil sich jeder Quader durch endlich viele Quader der Form $T_b(Q)$ überdecken läßt, folgt aus der Translationsinvarianz und der σ -Subadditivität von ν , daß $\nu(Q') < \infty$ für jeden Quader Q' .

2. Es sei $W = (0, 1]^n$ der Einheitswürfel und $c := \nu(W)$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ kann man W in N^n disjunkte halboffene Würfel der Kantenlänge $1/N$ zerlegen, die alle durch Translation ineinander übergehen und deshalb dasselbe Maß unter ν haben. Folglich hat ein Würfel W' der Kantenlänge $1/N$ das Maß $\nu(W') = c/N^n$.

3. Es sei nun Q ein halboffener Quader mit Kantenlängen $\ell_1, \dots, \ell_n > 0$. Wir wählen $N > \max\{1/\ell_1, \dots, 1/\ell_n\}$ und setzen $m_i := \lfloor \ell_i N \rfloor$. Dann kann man Q mit $\prod_i (m_i + 1)$ Würfeln der Kantenlänge $1/N$ überdecken und andererseits in Q wenigstens $\prod_i m_i$ Würfel der Kantenlänge $1/N$ disjunkt einbetten. Wegen der σ -Additivität und der Monotonie von ν folgt:

$$c \prod_i \left(\ell_i - \frac{1}{N}\right) \leq \frac{c}{N^n} \prod_i m_i \leq \nu(Q) \leq \frac{c}{N^n} \prod_i (m_i + 1) \leq c \prod_i \left(\ell_i + \frac{1}{N}\right).$$

Im Grenzübergang für $N \rightarrow \infty$ erhält man

$$\nu(Q) = c \prod_i \ell_i = c\mu(Q).$$

4. Es sei A eine beliebige meßbare Menge und $A \subset \bigcup_m Q_m$ eine Überdeckung durch halboffene Quader. Wegen der σ -Additivität von ν folgt:

$$\nu(A) \leq \sum_m \nu(Q_m) = c \sum_m \mu(Q_m).$$

Im Übergang zum Infimum über alle solche Quaderüberdeckungen bleibt $\nu(A) \leq c\mu(A)$.

5. Es sei A eine beschränkte meßbare Menge und Q ein Quader mit $Q \supset A$. Es folgt:

$$\nu(A) = \nu(Q) - \nu(Q \setminus A) \geq c\mu(Q) - c\mu(Q \setminus A) = c\mu(A).$$

Zusammengenommen hat man also $\nu(A) = c\mu(A)$ für jede beschränkte meßbare Menge A .

6. Ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_m Q_m$ eine abzählbare Zerlegung in Quader, so folgt für eine beliebige meßbare Menge A :

$$\nu(A) = \sum_m \nu(A \cap Q_m) = c \sum_m \mu(A \cap Q_m) = c\mu(A).$$

□

Die invertierbaren linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilden eine Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$, die sogenannte allgemeine lineare Gruppe.

Satz 1.3 — Für jede Lebesgue-meßbare Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Menge $A(X) = \{Ax \mid x \in X\}$ wieder Lebesgue-meßbar, und es gilt

$$\mu(A(X)) = |\det(A)| \cdot \mu(X).$$

Beweis. Wenn A nicht invertierbar ist, ist das Bild von A in einer Hyperebene enthalten und daher in jedem Falle eine Nullmenge. Insbesondere ist $\mu(A(X)) = 0$, und weil $\det(A) = 0$, ist die Behauptung wahr.

Wir können also im Folgenden annehmen, daß A invertierbar ist. Weil A^{-1} stetig ist, gehen unter der Multiplikation mit A offene Mengen in offene Menge über und allgemeiner Borel-meßbare Mengen in Borel-meßbare Mengen. Wir setzen $\nu(X) := \mu(A(X))$. Weil man jede Aussage über ν und Mengen X_i durch Anwenden von A^{-1} in Aussagen über μ und Mengen $A^{-1}X$ übersetzen kann, ist klar, daß ν ein Maß auf der Borel-Algebra ist. Außerdem gilt

$$\nu(T_b(X)) = \mu(A(T_b(X))) = \mu(T_{Ab}(AX)) = \mu(AX) = \nu(X)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^n$, weil $A(x + b) = Ax + Ab$. Das zeigt, daß ν translationsinvariant ist.

Es ist klar, daß das Bild $A(Q)$ eines beliebigen abgeschlossenen Quaders beschränkt ist, so daß sicher $\nu(Q) = \mu(A(Q)) < \infty$. Deshalb ist der Satz über die Eindeutigkeit translationsinvarianter Borelmaße bis auf skalare Faktoren anwendbar und zeigt: Es gibt für jede invertierbare Matrix A eine Konstante $c(A) \in (0, \infty)$ mit $\nu(A) = \mu(A(X)) = c(A)\mu(X)$, und wir müssen zeigen: $c(A) = |\det(A)|$.

Sind A und B invertierbare Matrizen, so folgt aus

$$c(AB)\mu(Q) = \mu(AB(Q)) = c(A)\mu(B(Q)) = c(A)c(B)\mu(Q)$$

für jeden Quader Q die Beziehung $c(AB) = c(A)c(B)$. Mit anderen Worten, die Abbildung $c : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Deshalb kann man sich im Beweis auf Matrizen von spezieller Form beschränken.

Es sei A eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen a_{11}, \dots, a_{nn} . Ist Q ein Quader mit den Kantenlängen ℓ_1, \dots, ℓ_n , dann ist $A(Q)$ ein Quader mit den Kantenlängen $a_{11}\ell_1, \dots, a_{nn}\ell_n$. Es folgt:

$$c(A)\mu(Q) = \mu(A(Q)) = \prod_i a_{ii}\ell_i = \det(A) \prod_i \ell_i = |\det(A)|\mu(Q).$$

Die Behauptung ist also wahr für positiv definite Diagonalmatrizen.

Es sei nun A eine orthogonale Matrix, d.h. eine Matrix mit $A^t A = I$. Insbesondere ist $\det(A) = \pm 1$. Die Multiplikation mit orthogonalen Matrizen ist längentreu. Deshalb wird die Einheitskugel B^n im \mathbb{R}^n bijektiv in sich abgebildet. Es folgt: $\mu(B^n) = \mu(A(B^n)) = c(A)\mu(B^n)$, also $c(A) = 1 = |\det(A)|$.

Eine beliebige invertierbare Matrix A besitzt stets eine Produktdarstellung $A = U_1 D U_2$ mit orthogonalen Matrizen U_1 und U_2 und einer positiv definiten Diagonalmatrix D . Es folgt: $c(A) = c(U_1)c(D)c(U_2) = |\det(U_1)|\det(D)|\det(U_2)| = |\det(A)|$.

Damit hat man $\mu(A(X)) = |\det(A)|\mu(X)$ für jede Borelmenge. Ist schließlich X eine Nullmenge, so gibt es Borelmengen X_n mit $X \subset X_n$ und $\mu(X_n) \rightarrow 0$. Es folgt $A(X) \subset A(X_n)$ und $\mu(A(X_n)) = |\det(A)|\mu(X_n) \rightarrow 0$. Also ist auch $A(X)$ eine Nullmenge. Da sich jede Lebesgue-meßbare Menge aus einer Borelmenge und einer Nullmenge zusammensetzen läßt, hat man $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ und $\mu(A(X)) = |\det(A)|\mu(X)$ für alle $X \in \mathfrak{M}$. \square

Der Satz macht eine wichtige Bedeutung des Begriffs der Determinanten deutlich:

Folgerung 1.4 — Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit den Spaltenvektoren A_1, \dots, A_n , so ist $|\det(A)|$ das Volumen des von den Vektoren A_1, \dots, A_n aufgespannten Spats $S = \{\sum_i y_i A_i \mid y_i \in [0, 1]\} = A([0, 1]^n)$. \square

Folgerung 1.5 — Der von den Vektoren A_1, \dots, A_n aufgespannte Spat hat das Volumen $\sqrt{\det(G)}$, wobei $G := (\langle A_i, A_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ die Gram-Matrix der Vektoren A_1, \dots, A_n bezeichnet.

Beweis. Es ist $G = A^t A$, also $\det(G) = \det(A)^2$. \square

Wiederholung aus der Linearen Algebra:

Für jede invertierbare Matrix A ist die Matrix $H = A^t A$ symmetrisch und positiv definit, denn für jeden Vektor $v \neq 0$ hat man $v^t H v = \|Av\|^2 > 0$. Es gibt deshalb nach dem Hauptachsentransformationssatz eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n mit $Hv_i = \lambda_i v_i$ und $\lambda_i > 0$. Es sei S die Matrix mit $Sv_i = \sqrt{\lambda_i} v_i$. Es sei Q die orthogonale Matrix mit den Spaltenvektoren v_i . Es gilt dann $SQ = QD$, wo D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$ ist. Außerdem ist S positiv definit, und $S^2 = H$. Wir setzen $AS^{-1} =: U$. Aus der Identität $U^t U = (S^{-1})^t A^t A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I$ folgt, daß U orthogonal ist. Damit hat man

$$A = US = UQDQ^{-1} = (UQ)DQ^{-1} = (UQ)D(UQ)^t U = \tilde{S}U.$$

Wir können dies wie folgt zusammenfassen

Satz 1.6 — Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.

1. Es gibt es eine eindeutig bestimmte orthogonale Matrix U und eindeutig bestimmte positiv definite symmetrische Matrizen S und \tilde{S} mit $A = US = \tilde{S}U$. Diese beiden Zerlegungen heißen Polarzerlegungen von A .
2. Es gibt orthogonale Matrizen U_1, U_2 und eine positiv definite Diagonalmatrix D mit $A = U_1 D U_2$.

Beweis. Es ist nur noch die Eindeutigkeit im Teil 1 zu zeigen. Ist $A = SU$ eine Zerlegung in eine positiv definite symmetrische Matrix S und eine orthogonale Matrix U , so folgt aus $S^2 = (SU)^t (SU) = A^t A$, daß S mit der positiv definiten symmetrischen Matrix $B = A^t A$ vertauscht und deshalb alle Eigenräume von B in sich abbilden muß. Außerdem hat die Einschränkung von S auf den Eigenraum zum Eigenwert λ selbst nur den Eigenwert $\sqrt{\lambda}$. Weil die Einschränkung symmetrisch und daher diagonalisierbar ist, ist S eindeutig bestimmt. Damit liegt auch U fest. \square