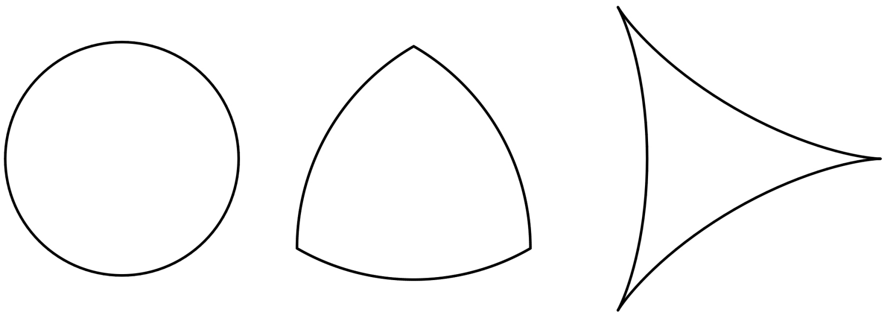
Ergänzung zu dem in der Vorlesung erwähnten Nadelproblem

Das Nadelproblem von Kakeya besteht darin, eine Fläche von minimalem Inhalt anzugeben, in der man eine (unendlich dünn gedachte) Nadel von Einheitslänge so stetig drehen und verschieben kann, daß sie schließlich wieder in der Ausgangslage liegt, sich dabei aber einmal vollständig gedreht hat.

Hier sind drei Flächen abgebildet, die einem dazu einfallen könnten: Ein Kreis, ein aus drei Kreisbögen zusammengesetztes Reuleaux'sches Dreieck und eine Hypozykloide. Bei der Hypozyloide rollt ein kleiner Kreis innen auf einem Kreis von dreifachem Radius ab, und die Kurve entsteht als Bahn eines auf dem kleinen Kreis fixierten Punktes. (Der englische Wikipediaeintrag zu hypocycloid hat eine hübsche Animation).



Aufgabe 0.1 — 1. Wie muß man die Dimensionen dieser geometrischen Objekte wählen, damit eine Nadel der Länge 1 in den von den Kurven begrenzten Fläche drehen kann?
2. Bestimmen Sie die Flächeninhalte der drei Flächen.

Im dritten Beispiel ist es nicht schwer, die Radien für den großen und den kleinen Kreis richtig zu raten. Man muß aber sauber geometrisch begründen, warum die Nadel in jeder Winkellage wirklich hineinpaßt. Die Flächenbestimmung gelingt in diesem Falle vielleicht am einfachsten, wenn man in Polarkoordinaten rechnet. Wir werden im Laufe der Vorlesung rechtfertigen, daß ein Flächensegment, das durch die Winkel ϕ_0 und ϕ_1 und den variablen Radius $r(\phi)$ begrenzt ist, den Inhalt $\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{r(\phi)^2}{2} d\phi$ hat.

Aufgabe 0.2 — Frischen Sie Ihre Geometrie- und Mupadkenntnisse auf, indem Sie eine animierte Graphik programmieren, in der man die Entstehung der Hypozykloide als Rollkurve ebenso sieht wie die Bewegung der darin eingespannten Nadel.

Das Nadelproblem wurde 1917 von dem japanischen Mathematiker Sōichi Kakeya (1886 -1947) formuliert und 1927 von dem russischen Mathematiker Abram Samoilowitsch Besicovitch (1891 - 1970) auf sehr überraschende Weise gelöst: Man kann den Flächeninhalt beliebig klein wählen.

Aufgabe 0.3 — Studieren Sie die Lösung von Besicovitch oder in der vereinfachten Fassung von Oskar Perron. Literatur: A. S. Besicovitch: *On Kakeya's problem and a similar one*. Mathematische Zeitschrift 27 (1928), 312 – 320. O. Perron: *Über einen Satz von Besicovitch*. Mathematische Zeitschrift 28 (1928), 383 – 386.