Prof. Dr. M. Lehn D. Hanke

9. Übung zur Vorlesung

“Analysis mehrerer Veränderlicher”

im Wintersemester 2011

1. Aufgabe: (Uneigentliches Riemann-Integral) Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass f auf jeder kompakten Teilmenge von $[a,b)$ Riemann-integrierbar ist. Die Funktion f heißt uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,b)$, wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann das uneigentliche Riemann-Integral von f auf $[a,b)$. Für $\infty \leq a < b < \infty$ definieren wir analog die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit auf dem Intervall $(a,b]$.

a) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren:

$$\int_0^\infty 3xe^{-2x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_3^\infty \frac{5}{x^s}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } s > 0,$$

$$\int_0^5 \frac{2}{x^s}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } s > 0.$$

b) Sei f eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f dann auch auf $[a,b)$ und $(a,b]$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, und dass die Werte aller drei Integrale übereinstimmen (d. h. die Schreibweise $\int_a^b$ ist nicht mehrdeutig).

Es seien nun $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derart, dass f auf jeder kompakten Teilmenge von (a,b) Riemann-integrierbar ist. Die Funktion f heißt uneigentlich Riemann-integrierbar auf (a,b), wenn für ein $c \in (a,b)$ die beiden Funktionen $f\big|_{(a,c]}$ und $f\big|_{[c,b)}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind, und wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) Zeigen Sie, dass die Riemann-Integrierbarkeit und der Wert des Integrals unabhängig vom gewählten Zwischenwert c sind.

d) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

bitte wenden ...

2. Aufgabe: (Fläche eines Parallelogramms) Seien $a, h, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und P das Parallelogramm

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < y \leq h,\ 0 < x - \frac{s}{h} y \leq a \right\}.$$

Zeigen sie, dass

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu(Q_i) \,\middle|\, Q_i \subset \mathbb{R}^2 \text{ halboffener Quader }, P \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \right\} \leq a \cdot h$$

3. Aufgabe: (Potenzmengen und Ringe) Es seien X eine Menge und $\mathbb{F}_2$ der Körper mit genau zwei Elementen.

a) Geben Sie eine natürliche Bijektion

$$\mathfrak{P}(X) \xrightarrow{\cong} \{f \colon X \to \mathbb{F}_2\}$$

an.

b) Wir versehen die Menge $\mathfrak{P}(X)$ mit einer Addition und einer Multiplikation, indem wir für Teilmengen $A, B \subset X$

$$A + B := A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$
$$A \cdot B := A \cap B$$

setzen. Die erste Verknüpfung heißt die symmetrische Differenz von A und B. Zeigen Sie, dass mit diesen Verknüpfungen $\mathfrak{P}(X)$ zu einem kommutativen Ring mit Eins (im Sinne der Algebra) wird.

(*Hinweis*: Die rechte Seite der obigen Bijektion trägt eine natürliche Ringstruktur)

c) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ genau dann ein Ring auf X im Sinne der Maßtheorie ist, wenn $\mathfrak{R}$ ein Unterring (eventuell *ohne* Eins) von $\mathfrak{P}(X)$ im Sinne der Algebra ist.

d) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}(\{1,2,3\})$ auf. Geben Sie einen echten Unterring $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ an.

4. Aufgabe: Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\mathfrak{S} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(X) \Leftrightarrow X$ abzählbar.

Abgabe bis Montag, 16.01.2012, 12:00 Uhr im Fach der jeweiligen Übungsgruppe

Bitte schauen Sie regelmäßig nach, ob Sie die aktuelle Version des Übungsblattes besitzen.